Wahlaufgaben

Aufgabe 2022 B/1b:

Die Gerade g hat die Funktionsgleichung $y = x + 2$. **5 P**

Die Parabel p_1 hat die Funktionsgleichung $y = -x^2 + 8$.

Die Parabel p_1 schneidet die Gerade g in den Punkten P und Q.

- Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte P und Q.

Durch die beiden Schnittpunkte P und Q verläuft die verschobene nach oben geöffnete Normalparabel p_2.

- Berechnen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes S_2 von p_2.

Robin behauptet: "Das Dreieck mit den Punkten P, Q und S_2 ist rechtwinklig."

- Hat Robin Recht? Begründen Sie Ihre Antwort rechnerisch.

Lösung 2022 B/1b:

1. Berechnung der Koordinaten der Schnittpunkte P und Q:

$$\begin{array}{l|} \text{I}: y = x + 2 \\ \text{II}: y = -x^2 + 8 \end{array}$$

Gleichsetzungsverfahren

$\text{I} = \text{II}: x + 2 = -x^2 + 8 \quad \left| +x^2 - 8 \right.$

$x + 2 + x^2 - 8 = 0$

Zusammenfassen

$x^2 + x - 6 = 0$

Normalform einer quadratischen Gleichung

$x^2 + 1 \cdot x - 6 = 0$

$x^2 + px + q = 0$

$p = 1$

$q = -6$

p und q bestimmen

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Lösungsformel

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1^2}{4} - (-6)}$$

$$x_{1,2} = -0{,}5 \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6}$$

$$x_{1,2} = -0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 6}$$

$$x_{1,2} = -0{,}5 \pm \sqrt{6{,}25}$$

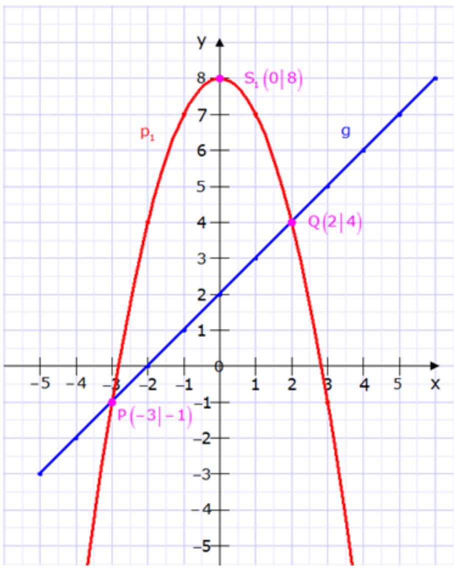
$$x_{1,2} = -0{,}5 \pm 2{,}5$$

$\underline{x_1} = -0{,}5 + 2{,}5 = \underline{2}$

$\underline{x_2} = -0{,}5 - 2{,}5 = \underline{-3}$

$\underline{y_1} = x_1 + 2 = 2 + 2 = \underline{4} \quad \Rightarrow \underline{\underline{Q(2|4)}}$

$\underline{y_2} = x_2 + 2 = -3 + 2 = \underline{-1} \Rightarrow \underline{\underline{P(-3|-1)}}$



Lösung 2022 B/1b:

2. Berechnung der Koordinaten des Scheitelpunktes S_2 von p_2:

$y = x^2 + px + q$ — Allgemeine Parabelgleichung

$\left| \begin{array}{l} P(-3|-1) \\ Q(2|4) \end{array} \right.$

Punktkoordinaten einsetzen

$$\left. \begin{array}{l} \text{I}: -1 = (-3)^2 + p\cdot(-3) + q \\ \text{II}: \;\; 4 = 2^2 + p\cdot 2 + q \end{array} \right|$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{I}': -1 = 9 - 3p + q \\ \text{II}': \;\; 4 = 4 + 2p + q \end{array} \right|$$

Seiten tauschen

$$\left. \begin{array}{l} \text{I}': 9 - 3p + q = -1 \\ \text{II}': 4 + 2p + q = 4 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{l} -9 + 3p \\ -4 - 2p \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{I}'': q = -10 + 3p \\ \text{II}'': q = -2p \end{array} \right|$$

Gleichsetzverfahren

$\text{I}'' = \text{II}'': -10 + 3p = -2p \quad | +2p$

$-10 + 5p = 0 \quad | +10$

$5p = 10 \quad | :5$

$\underline{p = 2}$

$\text{II}'': q = -2\cdot 2$ — p = 2 in II' einsetzen

$\underline{q = -4}$

$\underline{p_2: y = x^2 + 2x - 4}$

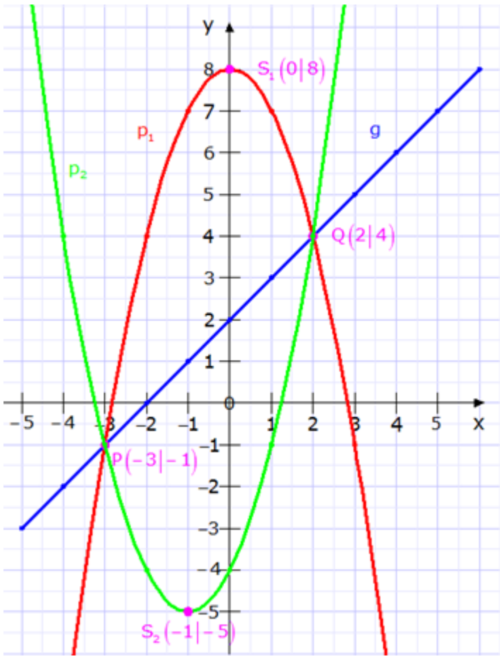
$y = (x - b)^2 + d\,;\, S(b|d)$ — Scheitelgleichung

$p_2: y = (x+1)^2 - 5$

$p_2: y = (x - (-1))^2 + (-5)$

$y = (x - (-1))^2 + (-5); S(-1|-5)$

$\underline{\underline{S_2(-1|-5)}}$



Lösung 2022 B/1b:

3. Überprüfung von Robins Behauptung:

$\overline{PS_2}^2 = 2^2 + 4^2$

$\overline{PS_2}^2 = 4 + 16$

$\overline{PS_2}^2 = 20 \quad | \sqrt{}$

$\overline{PS_2} = \sqrt{20}\,LE$

$\overline{PQ}^2 = 5^2 + 5^2$

$\overline{PQ}^2 = 25 + 25$

$\overline{PQ}^2 = 50 \quad | \sqrt{}$

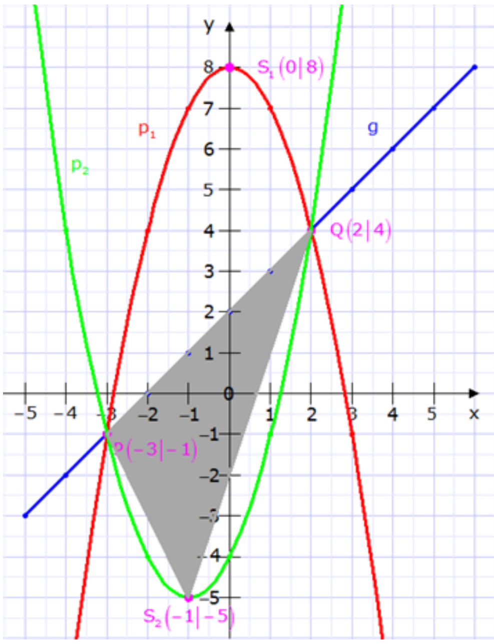
$\overline{PQ} = \sqrt{50}\,LE$

$\overline{S_2Q}^2 = 3^2 + 9^2$

$\overline{S_2Q}^2 = 9 + 81$

$\overline{S_2Q}^2 = 90 \quad | \sqrt{}$

$\overline{S_2Q} = \sqrt{90}\,LE$



Wenn der Satz des Pythagoras erfüllt wird, ist das Dreieck rechtwinklig

$c^2 = a^2 + b^2$

$\sqrt{90}^2 \neq \sqrt{50}^2 + \sqrt{20}^2$

$90 \neq 50 + 20$

$90 \neq 70$

Antwort: Robin hat nicht recht. Da der Satz von Pythagoras von dem Dreieck PQS_2 nicht erfüllt wird, ist das Dreieck nicht rechtwinklig.