Wahlaufgaben

Aufgabe 2017 W2a:

Für einen Zylinder gilt:

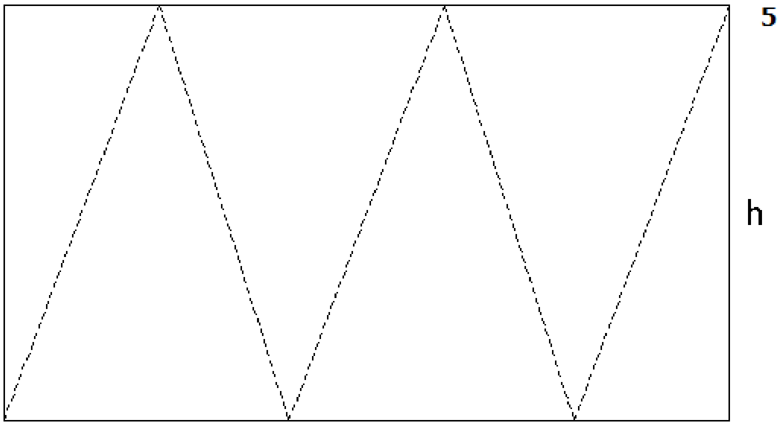
$r = 3,5\,\text{cm}$

$h = 12,0\,\text{cm}$

Die Mantelfläche des Zylinders wird abgerollt (siehe Skizze):

Mit den Einzelteilen dieses Rechtecks wird die Mantelfläche einer regelmäßigen fünfseitigen Pyramide vollständig beklebt.

Berechnen Sie das Volumen dieser Pyramide.



5 P

Strategie 2017 W2a:

Gegeben:

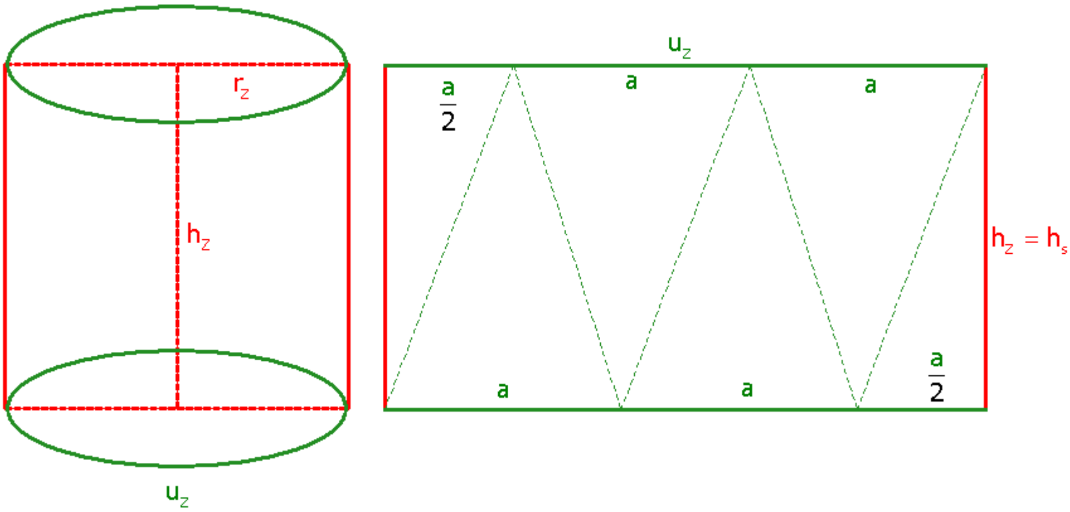
$r_z = 3,5\,\text{cm}$

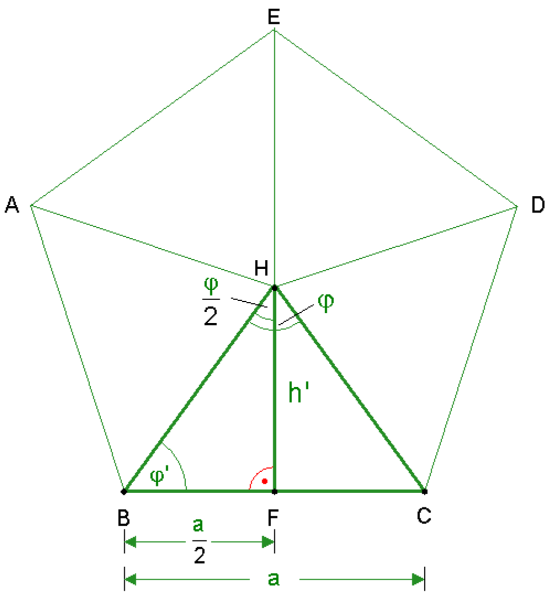
$h_z = 12,0\,\text{cm}$

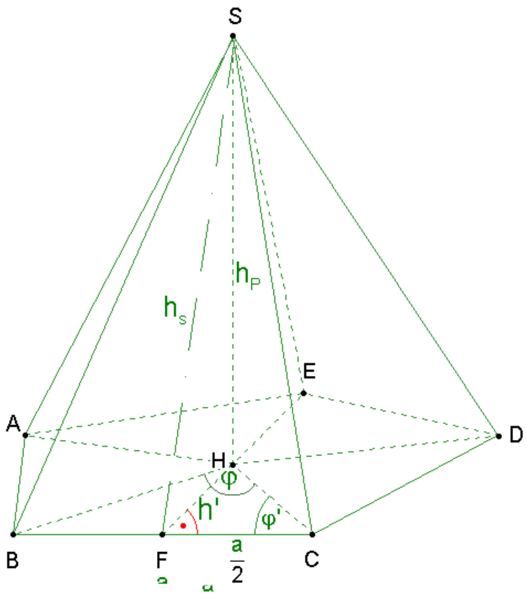
Gesucht:

V_{Pyr}

Skizze:

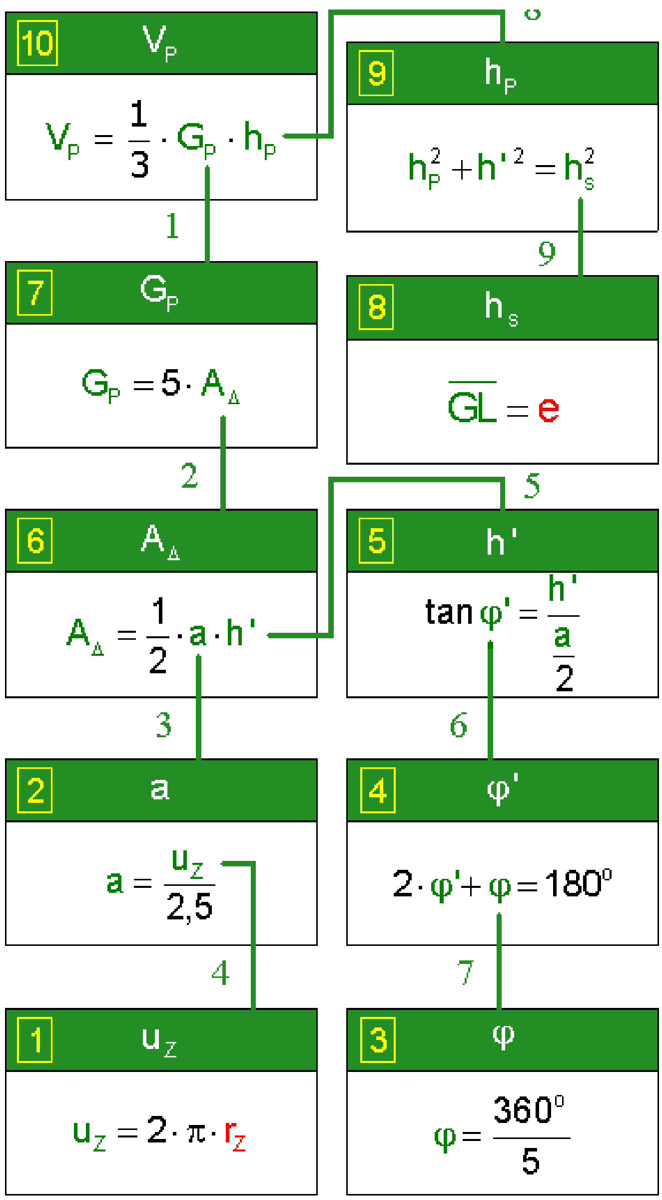






Strategie 2017 W2a:

<u>Struktogramm:</u>



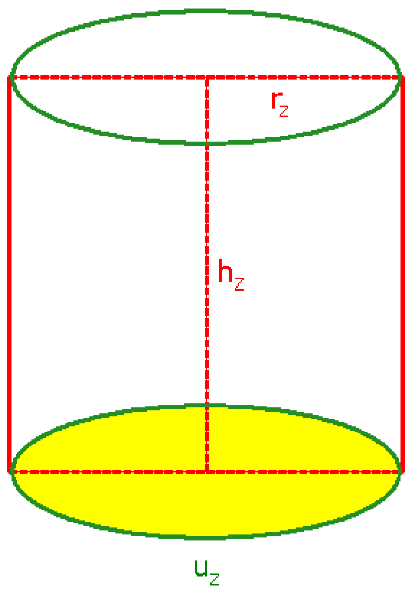
Lösung 2017 W2a:

<u>1. Berechnung des Zylinderumfangs u_Z:</u>

$u_Z = 2 \cdot \pi \cdot r_Z$ Formel Kreisumfang

$u_Z = 2 \cdot \pi \cdot 3,5$

$\underline{u_Z = 22\,\text{cm}}$



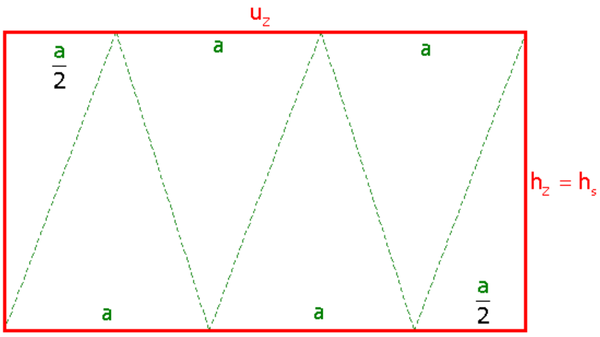
Lösung 2017 W2a:

2. Berechnung der Pyramiden-Grundkante a:

$$a = \frac{u_Z}{2,5}$$

$$a = \frac{22}{2,5}$$

$$\underline{a = 8,8\,cm}$$

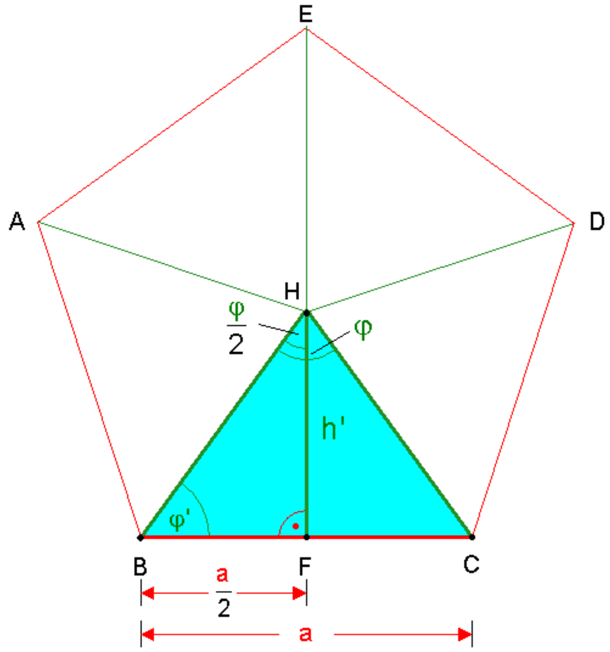


3. Berechnung des Winkels φ:

$$\varphi = \frac{360^\circ}{5}$$

5 gleichschenklige Dreiecke am Punkt H

$$\underline{\varphi = 72^\circ}$$



4. Berechnung des Winkels φ':

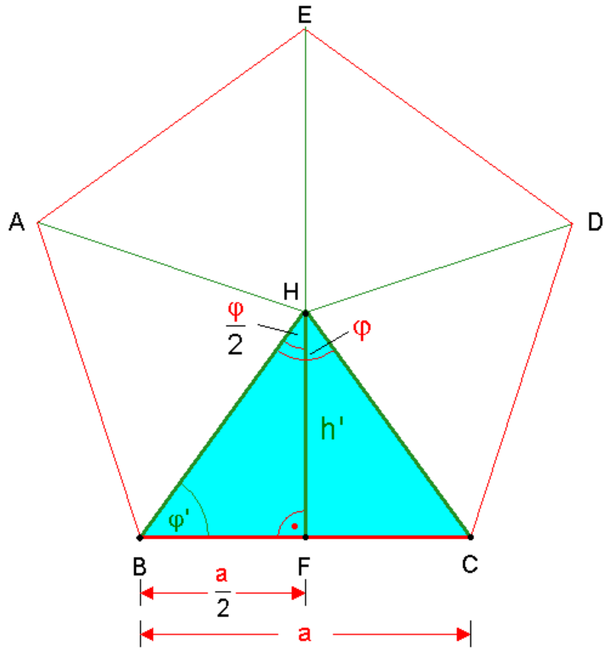
$$2 \cdot \varphi' + \varphi = 180^\circ$$

gleichschenkliges Dreieck: Basiswinkel gleich groß

$$2 \cdot \varphi' + 72^\circ = 180^\circ \quad \left| -72^\circ \right.$$

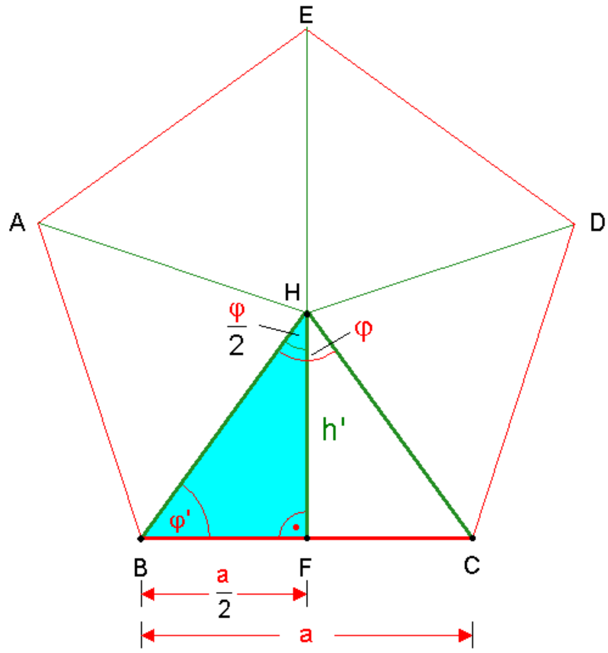
$$2 \cdot \varphi' = 108^\circ \quad \left| :2 \right.$$

$$\underline{\varphi' = 54^\circ}$$



Lösung 2017 W2a:

5. Berechnung der Dreieckshöhe h':



$$\tan\varphi' = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{h'}{\frac{a}{2}}$$

Tangensfunktion im rechtwinkligen hellbauen Dreieck BFH

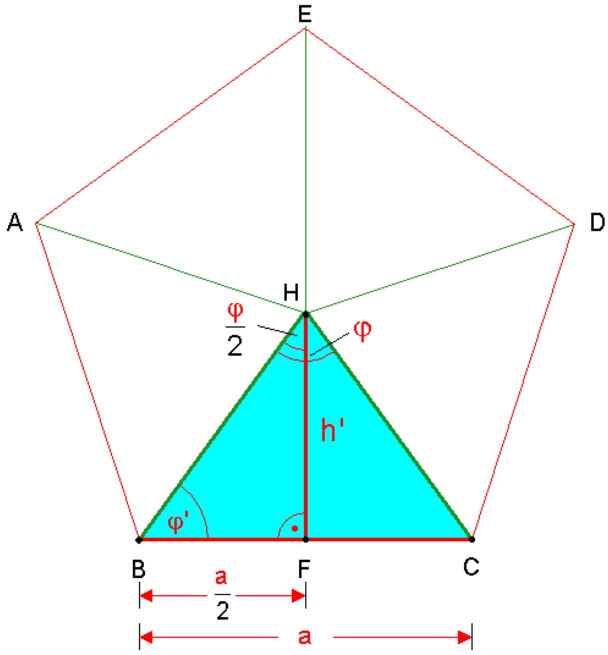
$$\tan 54° = \frac{h'}{\frac{8,8}{2}}$$

$$1,3764 = \frac{h'}{4,4}$$

$$\frac{h'}{4,4} = 1,3764 \qquad | \cdot 4,4$$

$$\underline{h' = 6,06\,\text{cm}}$$

6. Berechnung der Dreiecksfläche A_Δ:



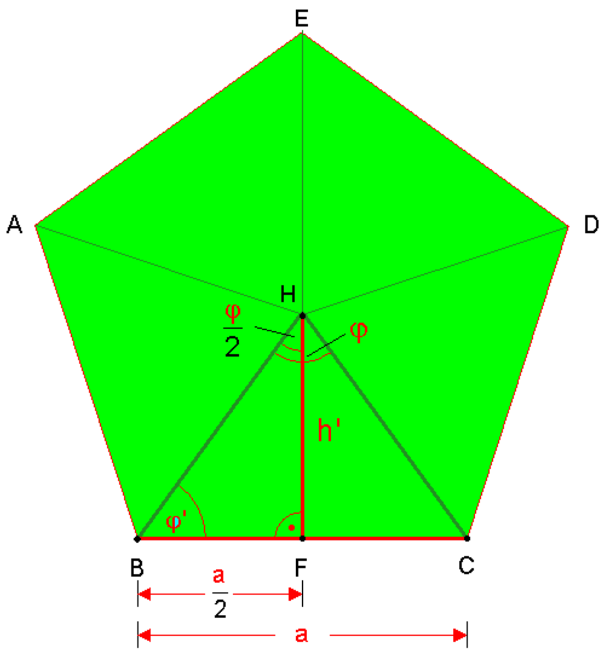
$$A_\Delta = \frac{\text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}}{2} = \frac{a \cdot h'}{2}$$

siehe hellblaues Dreieck BCH

$$A_\Delta = \frac{8,8 \cdot 6,06}{2}$$

$$\underline{A_\Delta = 26,66\,\text{cm}^2}$$

7. Berechnung der Pyramiden-Grundfläche G_P:



$$G_P = 5 \cdot A_\Delta$$

$$G_P = 5 \cdot 26,66$$

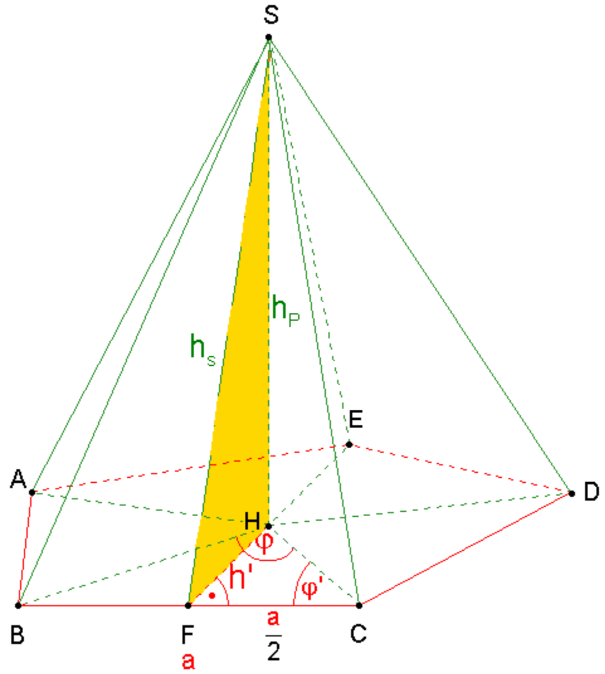
$$\underline{G_P = 133,3\,\text{cm}^2}$$

Lösung 2017 W2a:

8. Berechnung der Höhe der Pyramidenseitenfläche h_s:

$h_s = h_z$ siehe Skizze zu Rechenschritt 2

$\underline{h_s = 12\,\text{cm}}$



9. Berechnung der Pyramidenhöhe h_P:

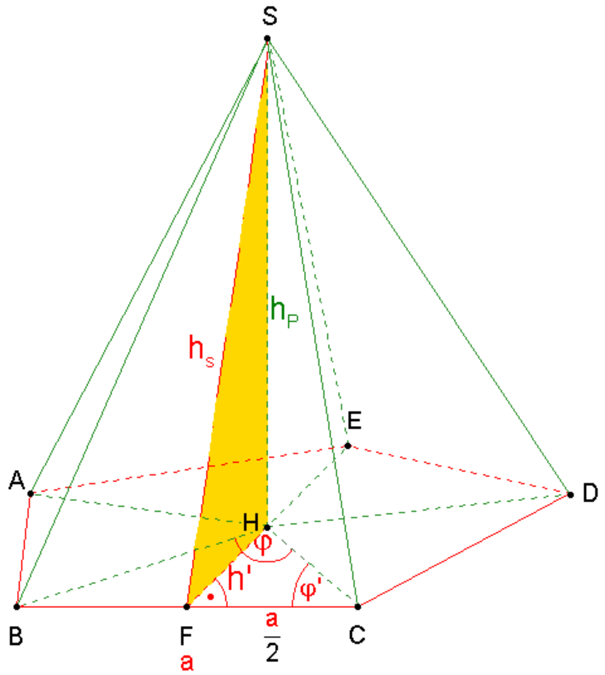
$h_P^2 + h'^2 = h_s^2$ Pythagoras im rechtwinkligen orangefarbenen Dreieck FHS

$h_P^2 + 6{,}06^2 = 12^2$

$h_P^2 + 36{,}72 = 144 \quad | -36{,}72$

$h_P^2 = 107{,}28 \quad | \sqrt{}$

$\underline{h_P = 10{,}36\,\text{cm}}$



Lösung 2017 W2a:

10. Berechnung des Pyramidenvolumens V_P:

$$V_P = \frac{1}{3} \cdot G_P \cdot h_P$$ Formel Pyramidenvolumen

$$V_P = \frac{1}{3} \cdot 133,3 \cdot 10,36$$

$$V_P = \frac{1}{3} \cdot 1380,99$$

$$\underline{\underline{V_P = 460,3\ cm^3}}$$